

Ejercicio 1 – Ordinaria 1 – Curso 2021/22

Dado el sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Discutir el sistema según los valores del parámetro λ y resolverlo, usando Cramer, cuando sea posible.
¿Existe alguna solución del sistema anterior con $y = 0$?

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \cancel{1} - \cancel{1} + 0 - \cancel{1} + \cancel{1} - 0 = 0 \quad \Downarrow$$

$\text{rg}(A) < 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{rg}(A) = 2, \forall \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 + \cancel{\lambda} + \lambda^2 - 1 - \cancel{\lambda} = 2\lambda^2 - 2$$

$$\lambda^2 = 1 \quad \Longleftarrow \quad \begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \pm 1$$

$$\text{rg}(A|b) = 3 \quad \forall \lambda \neq \pm 1.$$

$\lambda = 1$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{rg}(A|b) = 2$$

$$\lambda = -1$$

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0$$

$$\text{rg}(A|b) = 3$$

$$\text{rg}(A|b) = \begin{cases} 3 & \dots \lambda \neq 1 \\ 2 & \dots \lambda = 1 \end{cases}$$

Discusión

$$\lambda \neq 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A|b) \Rightarrow \text{S.I.} \\ (\text{sin solución})$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \text{rg}(A) = \underline{2} = \text{rg}(A|b) < n^{\circ} \text{ incógnitas}$$

S. Compatible Indet.
(∞ soluciones)

$$\boxed{\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{matrix}} \Rightarrow \begin{matrix} z = \lambda \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x + y = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \end{matrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = (1-\lambda) - (1+\lambda) = -2\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1+\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = 1+\lambda$$

Solución: $(x = -2\lambda, y = 1+\lambda, z = \lambda), \underline{\underline{\forall \lambda \in \mathbb{R}}}$

$$y = 1+\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Solución: $(2, 0, -1)$
